

Le modèle de *Saint-Venant*  
multi-couches à surface libre :  
Traitement des conditions limites ouvertes

Ronan Monjarret

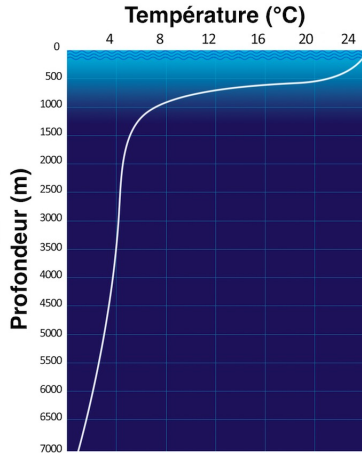
Sous la direction de R. Baraille, F. Chazel et J.P. Vila

Soutenance de thèse du 16 Décembre 2014



Température de surface (Golfe de Gascogne - Août 2010)

# Un océan stratifié



Température (°C) en fonction de la profondeur (m)  
(Golfe de Gascogne - Août 2010)

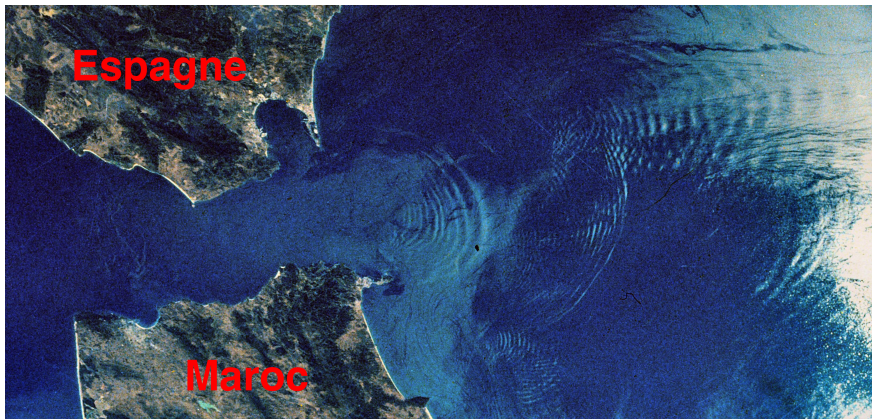
# Propagation d'ondes internes



Manifestation d'une onde interne à la surface



# Propagation d'ondes internes



Capture satellite<sup>1</sup> d'ondes internes (détroit de Gibraltar - 11/10/1984)

---

<sup>1</sup>Mission Challenger (STS-41-G)

## Intérêt pour le SHOM

**Objectifs** : Mise en œuvre de systèmes opérationnels en temps réels basés sur un modèle aux équations primitives et forcés par des observations prises en compte par des techniques d'assimilation de données.

## Intérêt pour le SHOM

**Objectifs** : Mise en œuvre de systèmes opérationnels en temps réels basés sur un modèle aux équations primitives et forcés par des observations prises en compte par des techniques d'assimilation de données.

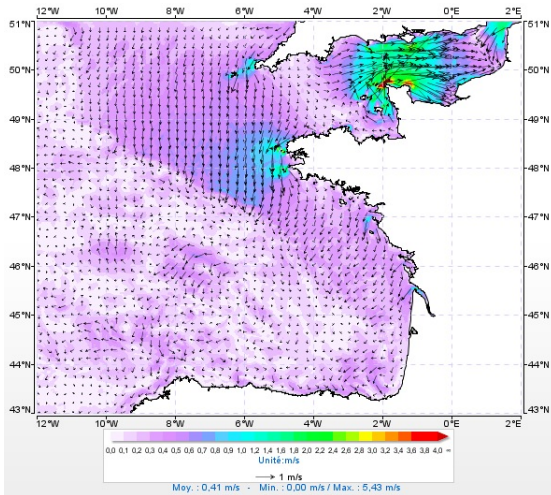
## Intérêt pour le SHOM

**Objectifs** : Mise en œuvre de systèmes opérationnels en temps réels basés sur un modèle aux équations primitives et forcés par des observations prises en compte par des techniques d'assimilation de données.

# HYCOM

- **HY**brid **C**oordinate **O**cean **M**odel
- Collaboration entre les États-Unis et l'Europe

# Intérêt pour le SHOM



Prévisions HYCOM (Golfe de Gascogne - 17/12/2014)  
Vitesse de surface ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )

# Problématique

## Question

Comment améliorer le traitement des conditions limites ouvertes, dans HYCOM?

## Méthodologie

Analyse d'un sous-problème : le modèle de *Saint-Venant* multi-couches à surface libre

# Problématique

## Question

Comment améliorer le traitement des conditions limites ouvertes, dans HYCOM?

## Méthodologie

Analyse d'un sous-problème : le modèle de *Saint-Venant* multi-couches à surface libre

# Problématique

## Question

Comment améliorer le traitement des conditions limites ouvertes, dans HYCOM?

## Méthodologie

Analyse d'un sous-problème : le modèle de *Saint-Venant* multi-couches à surface libre



- 1 Modélisation du problème
- 2 Modèle à 2 couches
- 3 Modèle à  $n$  couches
- 4 Conditions limites ouvertes

## Quelques références

- Modèle à 1 couche :
  - 1D [**de Saint-Venant (1871)**]
  - 2D [**Friedrichs (1948)**]
- Modèle à 2 couches :
  - 1D [**Long (1956)**; **Ovsyannikov (1979)**; **Barros, Choi (2008)**]
  - 2D [**Duchêne (2010)**]
- Modèle à  $n$  couches :
  - 1D [**Audusse (2011)**; **Duchêne (2013)**]
  - 2D pour tri-couches [**Stewart, Dellar (2013)**]

## Quelques références

- Modèle à 1 couche :
  - 1D [**de Saint-Venant (1871)**]
  - 2D [**Friedrichs (1948)**]
- Modèle à 2 couches :
  - 1D [**Long (1956)**; **Ovsyannikov (1979)**; **Barros, Choi (2008)**]
  - 2D [**Duchêne (2010)**]
- Modèle à  $n$  couches :
  - 1D [**Audusse (2011)**; **Duchêne (2013)**]
  - 2D pour tri-couches [**Stewart, Dellar (2013)**]

## Quelques références

- Modèle à 1 couche :
  - 1D [**de Saint-Venant (1871)**]
  - 2D [**Friedrichs (1948)**]
- Modèle à 2 couches :
  - 1D [**Long (1956); Ovsyannikov (1979); Barros, Choi (2008)**]
  - 2D [**Duchêne (2010)**]
- Modèle à  $n$  couches :
  - 1D [**Audusse (2011); Duchêne (2013)**]
  - 2D pour tri-couches [**Stewart, Dellar (2013)**]

## Quelques références

- Modèle à 1 couche :
  - 1D [**de Saint-Venant (1871)**]
  - 2D [**Friedrichs (1948)**]
- Modèle à 2 couches :
  - 1D [**Long (1956); Ovsyannikov (1979); Barros, Choi (2008)**]
  - 2D [**Duchêne (2010)**]
- Modèle à  $n$  couches :
  - 1D [**Audusse (2011); Duchêne (2013)**]
  - 2D pour tri-couches [**Stewart, Dellar (2013)**]

1 Modélisation du problème

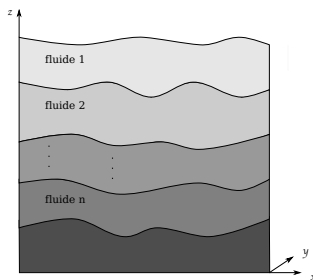
2 Modèle à 2 couches

3 Modèle à  $n$  couches

4 Conditions limites ouvertes

## Hypothèses adaptées aux océans

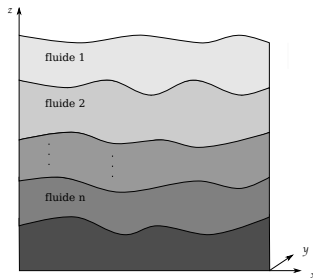
- $n$  fluides homogènes, incompressibles, sans tension de surface et au repos à l'infini, non-visqueux.
- Approximation hydrostatatique + Pression continue aux interfaces internes et constante à la surface libre.
- Régime d'eaux peu profondes :  $\mu := \frac{H^2}{L^2} \ll 1$ .
- Les fluides ne sont **pas supposés irrotationnels**.



Configuration  $n$  couches

## Hypothèses adaptées aux océans

- $n$  fluides homogènes, incompressibles, sans tension de surface et au repos à l'infini, non-visqueux.
- Approximation hydrostatatique + Pression continue aux interfaces internes et constante à la surface libre.
- Régime d'eaux peu profondes :  $\mu := \frac{H^2}{L^2} \ll 1$ .
- Les fluides ne sont **pas supposés irrotationnels**.

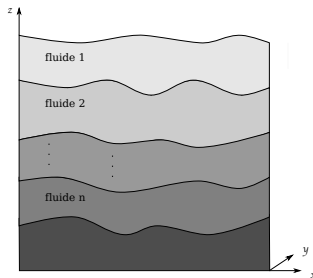


Configuration  $n$  couches



## Hypothèses adaptées aux océans

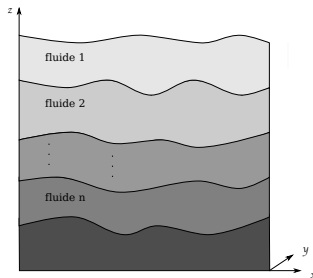
- $n$  fluides homogènes, incompressibles, sans tension de surface et au repos à l'infini, non-visqueux.
- Approximation hydrostatatique + Pression continue aux interfaces internes et constante à la surface libre.
- Régime d'eaux peu profondes :  $\mu := \frac{H^2}{L^2} \ll 1$ .
- Les fluides ne sont **pas supposés irrotationnels**.



Configuration  $n$  couches

## Hypothèses adaptées aux océans

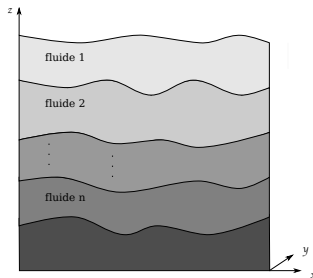
- $n$  fluides homogènes, incompressibles, sans tension de surface et au repos à l'infini, non-visqueux.
- Approximation hydrostatatique + Pression continue aux interfaces internes et constante à la surface libre.
- Régime d'eaux peu profondes :  $\mu := \frac{H^2}{L^2} \ll 1$ .
- Les fluides ne sont pas supposés irrotationnels.



Configuration  $n$  couches

## Hypothèses adaptées aux océans

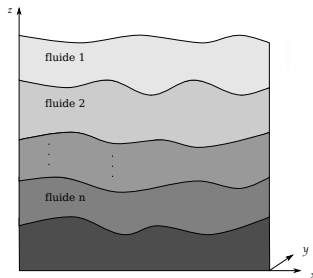
- $n$  fluides homogènes, incompressibles, sans tension de surface et au repos à l'infini, non-visqueux.
- Approximation hydrostatatique + Pression continue aux interfaces internes et constante à la surface libre.
- Régime d'eaux peu profondes :  $\mu := \frac{H^2}{L^2} \ll 1$ .
- Les fluides ne sont **pas supposés irrotationnels**.



Configuration  $n$  couches

## Hypothèses adaptées aux océans

- $n$  fluides homogènes, incompressibles, sans tension de surface et au repos à l'infini, non-visqueux.
- Approximation hydrostatatique + Pression continue aux interfaces internes et constante à la surface libre.
- Régime d'eaux peu profondes :  $\mu := \frac{H^2}{L^2} \ll 1$ .
- Les fluides ne sont **pas supposés irrotationnels**.



Configuration  $n$  couches

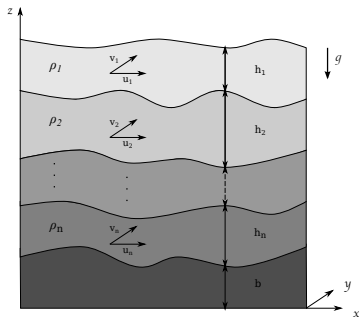
Pour chaque couche  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\begin{cases} \partial_t h_i + \nabla_X \cdot h_i \mathbf{u}_i & = 0 \\ \partial_t \mathbf{u}_i + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla_x) \mathbf{u}_i + \nabla_X P_i & = f \mathbf{u}_i^\perp \end{cases}$$

- $\rho_i$  : densité constante
- $h_i$  : épaisseur
- $\mathbf{u}_i = (u_i, v_i)$  : vecteur des vitesses moyennes horizontales

$$P_i = g \left( b + \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} h_k \right) + P_0$$

- $f$  : paramètre de *Coriolis*
- $P_0$  : pression à la surface libre



Configuration à  $n$  couches

- $g$  : constante d'accélération
- $b$  : topographie

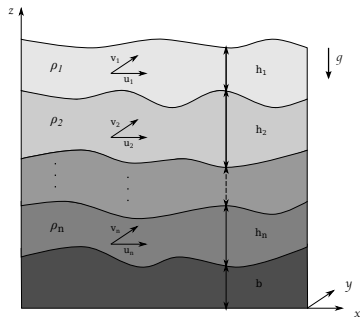
Pour chaque couche  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\begin{cases} \partial_t h_i + \nabla_X \cdot h_i \mathbf{u}_i & = 0 \\ \partial_t \mathbf{u}_i + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla_x) \mathbf{u}_i + \nabla_X P_i & = f \mathbf{u}_i^\perp \end{cases}$$

- $\rho_i$  : densité constante
- $h_i$  : épaisseur
- $\mathbf{u}_i = (u_i, v_i)$  : vecteur des vitesses moyennes horizontales

$$P_i = g \left( b + \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} h_k \right) + P_0$$

- $f$  : paramètre de *Coriolis*
- $P_0$  : pression à la surface libre



Configuration à  $n$  couches

- $g$  : constante d'accélération
- $b$  : topographie

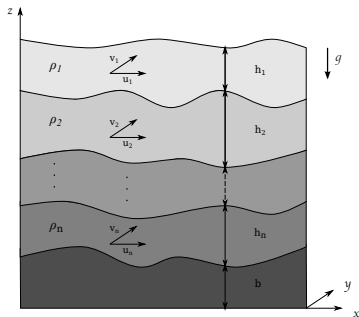
Pour chaque couche  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\begin{cases} \partial_t h_i + \nabla_X \cdot h_i \mathbf{u}_i & = 0 \\ \partial_t \mathbf{u}_i + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla_x) \mathbf{u}_i + \nabla_X P_i & = f \mathbf{u}_i^\perp \end{cases}$$

- $\rho_i$  : densité constante
- $h_i$  : épaisseur
- $\mathbf{u}_i = (u_i, v_i)$  : vecteur des vitesses moyennes horizontales

$$P_i = g \left( b + \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} h_k \right) + P_0$$

- $f$  : paramètre de *Coriolis*
- $P_0$  : pression à la surface libre



Configuration à  $n$  couches

- $g$  : constante d'accélération
- $b$  : topographie

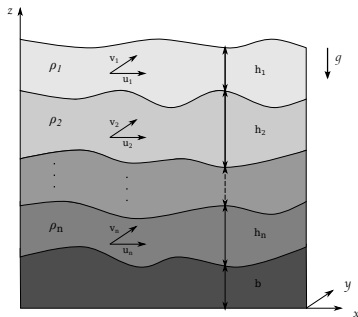
Pour chaque couche  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\begin{cases} \partial_t h_i + \nabla_X \cdot h_i \mathbf{u}_i & = 0 \\ \partial_t \mathbf{u}_i + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla_x) \mathbf{u}_i + \nabla_X P_i & = f \mathbf{u}_i^\perp \end{cases}$$

- $\rho_i$  : densité constante
- $h_i$  : épaisseur
- $\mathbf{u}_i = (u_i, v_i)$  : vecteur des vitesses moyennes horizontales

$$P_i = g \left( b + \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} h_k \right) + P_0$$

- $f$  : paramètre de *Coriolis*
- $P_0$  : pression à la surface libre



Configuration à  $n$  couches

- $g$  : constante d'accélération
- $b$  : topographie



## Mise sous forme d'un système

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + A_x(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} + A_y(\mathbf{u}) \partial_y \mathbf{u} = \mathbf{b}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (1)$$

- $\mathbf{u} := {}^\top (h_1, \dots, h_n, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$
- $A_x(\mathbf{u})$  and  $A_y(\mathbf{u})$  sont des matrices réelles  $3n \times 3n$ ,  $\mathbf{b}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{3n}$
- $\mathbf{u}_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)^{3n}$ ,  $s > 2$

### Questions :

- Ce système de *Cauchy* admet-il une unique solution?
- Est-elle stable? Comment varie-t-elle lorsque la condition initiale varie?

### Difficultés :

- Grand nombre de paramètres et d'équations
- Système d'EDPs non-linéaires, à 2 dimensions d'espace, non-conservatif

## Mise sous forme d'un système

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + A_x(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} + A_y(\mathbf{u}) \partial_y \mathbf{u} = \mathbf{b}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (1)$$

- $\mathbf{u} := {}^\top (h_1, \dots, h_n, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$
- $A_x(\mathbf{u})$  and  $A_y(\mathbf{u})$  sont des matrices réelles  $3n \times 3n$ ,  $\mathbf{b}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{3n}$
- $\mathbf{u}_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)^{3n}$ ,  $s > 2$

### Questions :

- Ce système de *Cauchy* admet-il une unique solution?
- Est-elle stable? Comment varie-t-elle lorsque la condition initiale varie?

### Difficultés :

- Grand nombre de paramètres et d'équations
- Système d'EDPs non-linéaires, à 2 dimensions d'espace, non-conservatif

## Mise sous forme d'un système

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + A_x(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} + A_y(\mathbf{u}) \partial_y \mathbf{u} = \mathbf{b}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (1)$$

- $\mathbf{u} := {}^\top (h_1, \dots, h_n, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$
- $A_x(\mathbf{u})$  and  $A_y(\mathbf{u})$  sont des matrices réelles  $3n \times 3n$ ,  $\mathbf{b}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{3n}$
- $\mathbf{u}_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)^{3n}$ ,  $s > 2$

### Questions :

- Ce système de *Cauchy* admet-il une unique solution?
- Est-elle stable? Comment varie-t-elle lorsque la condition initiale varie?

### Difficultés :

- Grand nombre de paramètres et d'équations
- Système d'EDPs non-linéaires, à 2 dimensions d'espace, non-conservatif

## Mise sous forme d'un système

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + A_x(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} + A_y(\mathbf{u}) \partial_y \mathbf{u} = \mathbf{b}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(t = 0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (1)$$

- $\mathbf{u} := {}^\top (h_1, \dots, h_n, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$
- $A_x(\mathbf{u})$  and  $A_y(\mathbf{u})$  sont des matrices réelles  $3n \times 3n$ ,  $\mathbf{b}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{3n}$
- $\mathbf{u}_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)^{3n}$ ,  $s > 2$

### Questions :

- Ce système de *Cauchy* admet-il une unique solution?
- Est-elle stable? Comment varie-t-elle lorsque la condition initiale varie?

### Difficultés :

- Grand nombre de paramètres et d'équations
- Système d'EDPs non-linéaires, à 2 dimensions d'espace, non-conservatif

# Hyperbolicité

## Définition

Le système d'EDPs est **hyperbolique** sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^{3n}$  ssi

$$\forall \mathbf{u} \in \Omega, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}} \|\exp(-it(A(\mathbf{u}, \theta)))\| < +\infty$$

avec  $A(\mathbf{u}, \theta) := \cos \theta A_x(\mathbf{u}) + \sin \theta A_y(\mathbf{u}, \theta)$

## Propriétés

- Si le système d'EDPs est hyperbolique sur  $\Omega$ , alors pour tout  $\mathbf{u}_0 \in \Omega$ , alors il est localement bien-posé dans  $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^2)^{3n}$ ,  $s > 2$

# Hyperbolicité

## Définition

Le système d'EDPs est **hyperbolique** sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^{3n}$  ssi

$$\forall \mathbf{u} \in \Omega, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}} \|\exp(-it(A(\mathbf{u}, \theta)))\| < +\infty$$

avec  $A(\mathbf{u}, \theta) := \cos \theta A_x(\mathbf{u}) + \sin \theta A_y(\mathbf{u}, \theta)$

## Propriétés

- Si le système d'EDPs est hyperbolique sur  $\Omega$ , alors pour tout  $\mathbf{u}_0 \in \Omega$ , alors il est localement bien-posé dans  $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^2)^{3n}$ ,  $s > 2$

# Hyperbolicité

## Définition

Le système d'EDPs est **hyperbolique** sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^{3n}$  ssi

$$\forall \mathbf{u} \in \Omega, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}} \|\exp(-it(A(\mathbf{u}, \theta)))\| < +\infty$$

avec  $A(\mathbf{u}, \theta) := \cos \theta A_x(\mathbf{u}) + \sin \theta A_y(\mathbf{u}, \theta)$

## Propriétés

- Si le système d'EDPs est hyperbolique sur  $\Omega$ , alors pour tout  $\mathbf{u}_0 \in \Omega$ , alors il est localement bien-posé dans  $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^2)^{3n}$ ,  $s > 2$
- Si le système d'EDPs est hyperbolique sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^{3n}$ , alors

$$\forall (\mathbf{u}, \theta) \in \Omega \times \mathbb{R}, \quad \text{Sp}(A(\mathbf{u}, \theta)) \subset \mathbb{R}$$

- Si  $A(\mathbf{u}, \theta)$  est à valeurs propres réelles et de multiplicité constantes sur  $\Omega \times \mathbb{R}$ , alors le système est hyperbolique sur  $\Omega$

# Hyperbolicité

## Définition

Le système d'EDPs est **hyperbolique** sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^{3n}$  ssi

$$\forall \mathbf{u} \in \Omega, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}} \|\exp(-it(A(\mathbf{u}, \theta)))\| < +\infty$$

avec  $A(\mathbf{u}, \theta) := \cos \theta A_x(\mathbf{u}) + \sin \theta A_y(\mathbf{u}, \theta)$

## Propriétés

- Si le système d'EDPs est hyperbolique sur  $\Omega$ , alors pour tout  $\mathbf{u}_0 \in \Omega$ , alors il est localement bien-posé dans  $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^2)^{3n}$ ,  $s > 2$
- Si le système d'EDPs est hyperbolique sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^{3n}$ , alors

$$\forall (\mathbf{u}, \theta) \in \Omega \times \mathbb{R}, \quad \text{Sp}(A(\mathbf{u}, \theta)) \subset \mathbb{R}$$

- Si  $A(\mathbf{u}, \theta)$  est à valeurs propres réelles et de multiplicité constantes sur  $\Omega \times \mathbb{R}$ , alors le système est hyperbolique sur  $\Omega$



# Symétrisabilité

## Définition<sup>2</sup>

- Le système d'EDPs est **symboliquement symétrisable** sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^{3n}$  ssi  
pour tout  $(\mathbf{u}, \theta) \in \Omega \times \mathbb{R}$ , il existe une matrice  $S(\mathbf{u}, \theta)$  symétrique définie positive telle que  $S(\mathbf{u}, \theta)A(\mathbf{u}, \theta)$  soit symétrique
- Le système est dit **Friedrichs-symétrisable** si la matrice  $S(\mathbf{u}, \theta)$  est indépendante de  $\theta$

## Propriété

Si le système d'EDPs est symétrisable, alors il est hyperbolique

---

<sup>2</sup>S. Benzoni-Gavage & D. Serre, *Multidimensional hyperbolic partial differential equations : First-order systems and applications*, 2007

# Symétrisabilité

## Définition<sup>2</sup>

- Le système d'EDPs est **symboliquement symétrisable** sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^{3n}$  ssi  
pour tout  $(\mathbf{u}, \theta) \in \Omega \times \mathbb{R}$ , il existe une matrice  $S(\mathbf{u}, \theta)$  symétrique définie positive telle que  $S(\mathbf{u}, \theta)A(\mathbf{u}, \theta)$  soit symétrique
- Le système est dit **Friedrichs-symétrisable** si la matrice  $S(\mathbf{u}, \theta)$  est indépendante de  $\theta$

## Propriété

Si le système d'EDPs est symétrisable, alors il est hyperbolique

---

<sup>2</sup>S. Benzoni-Gavage & D. Serre, *Multidimensional hyperbolic partial differential equations : First-order systems and applications*, 2007

# Symétrisabilité

## Définition<sup>2</sup>

- Le système d'EDPs est **symboliquement symétrisable** sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^{3n}$  ssi  
pour tout  $(\mathbf{u}, \theta) \in \Omega \times \mathbb{R}$ , il existe une matrice  $S(\mathbf{u}, \theta)$  symétrique définie positive telle que  $S(\mathbf{u}, \theta)A(\mathbf{u}, \theta)$  soit symétrique
- Le système est dit **Friedrichs-symétrisable** si la matrice  $S(\mathbf{u}, \theta)$  est indépendante de  $\theta$

## Propriété

Si le système d'EDPs est symétrisable, alors il est hyperbolique

---

<sup>2</sup>S. Benzoni-Gavage & D. Serre, *Multidimensional hyperbolic partial differential equations : First-order systems and applications*, 2007

- 1 Modélisation du problème
- 2 Modèle à 2 couches**
- 3 Modèle à  $n$  couches
- 4 Conditions limites ouvertes

# Symétrisabilité

## Résultats précédents

En **1D**, le modèle bi-couches est *Friedrichs*-symétrisable. En **2D**, V. Duchêne<sup>3</sup> a prouvé, dans le cas **irrotationnel**, qu'il l'est aussi si  $\mathbf{u}_0$  vérifie

$$\begin{cases} \inf_{X \in \mathbb{R}^2} h_1^0 > 0, \inf_{X \in \mathbb{R}^2} h_2^0 > 0 \\ \inf_{X \in \mathbb{R}^2} (1 - \frac{\rho_1}{\rho_2})gh_1^0 - u_1^{0\ 2} - v_1^{0\ 2} > 0 \\ \inf_{X \in \mathbb{R}^2} gh_2^0 - u_2^{0\ 2} - v_2^{0\ 2} > 0 \end{cases}$$

## Théorème

Dans le cas **2D rotationnel**, le système est symbol. symétrisable si  $\mathbf{u}_0$  vérifie

$$\begin{cases} \inf_{X \in \mathbb{R}^2} h_1^0 > 0, \inf_{X \in \mathbb{R}^2} h_2^0 > 0 \\ \inf_{X \in \mathbb{R}^2} (1 - \frac{\rho_1}{\rho_2})gh_2^0 - (u_2^0 - u_1^0)^2 - (v_2^0 - v_1^0)^2 > 0 \end{cases}$$

<sup>3</sup>*Asymptotic shallow water models for internal waves in a two-fluid system with a free surface*, 2009

# Symétrisabilité

## Résultats précédents

En **1D**, le modèle bi-couches est *Friedrichs*-symétrisable. En **2D**, V. Duchêne<sup>3</sup> a prouvé, dans le cas **irrotationnel**, qu'il l'est aussi si  $\mathbf{u}_0$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf_{X \in \mathbb{R}^2} h_1^0 > 0, \quad \inf_{X \in \mathbb{R}^2} h_2^0 > 0 \\ \inf_{X \in \mathbb{R}^2} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) g h_1^0 - u_1^{0\ 2} - v_1^{0\ 2} > 0 \\ \inf_{X \in \mathbb{R}^2} g h_2^0 - u_2^{0\ 2} - v_2^{0\ 2} > 0 \end{array} \right.$$

## Théorème

Dans le cas **2D rotationnel**, le système est symbol. symétrisable si  $\mathbf{u}_0$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf_{X \in \mathbb{R}^2} h_1^0 > 0, \quad \inf_{X \in \mathbb{R}^2} h_2^0 > 0 \\ \inf_{X \in \mathbb{R}^2} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) g h_2^0 - (u_2^0 - u_1^0)^2 - (v_2^0 - v_1^0)^2 > 0 \end{array} \right.$$

<sup>3</sup>*Asymptotic shallow water models for internal waves in a two-fluid system with a free surface*, 2009

# Symétrisabilité

## Résultats précédents

En **1D**, le modèle bi-couches est *Friedrichs*-symétrisable. En **2D**, V. Duchêne<sup>3</sup> a prouvé, dans le cas **irrotationnel**, qu'il l'est aussi si  $\mathbf{u}_0$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf_{x \in \mathbb{R}^2} h_1^0 > 0, \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^2} h_2^0 > 0 \\ \inf_{x \in \mathbb{R}^2} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) g h_1^0 - u_1^{0\ 2} - v_1^{0\ 2} > 0 \\ \inf_{x \in \mathbb{R}^2} g h_2^0 - u_2^{0\ 2} - v_2^{0\ 2} > 0 \end{array} \right.$$

## Théorème

Dans le cas **2D rotationnel**, le système est symbol. symétrisable si  $\mathbf{u}_0$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf_{x \in \mathbb{R}^2} h_1^0 > 0, \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^2} h_2^0 > 0 \\ \inf_{x \in \mathbb{R}^2} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) g h_2^0 - (u_2^0 - u_1^0)^2 - (v_2^0 - v_1^0)^2 > 0 \end{array} \right.$$

<sup>3</sup> *Asymptotic shallow water models for internal waves in a two-fluid system with a free surface*, 2009

# Hyperbolicité

## Résultats précédents : cas 1D

- L. Ovsyannikov<sup>4</sup> donne un 1<sup>er</sup> critère **approché** :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} - \frac{(u_2^0 - u_1^0)^2}{g(h_1^0 + h_2^0)} > 0$$

- M.J. Castro-Díaz & al.<sup>5</sup> note **numériquement** l'existence d'un autre domaine d'hyperbolicité

---

<sup>4</sup> *Two-layer shallow water model*, 1979

<sup>5</sup> *Numerical treatment of the loss of hyperbolicity*, 2011



# Hyperbolicité

## Résultats précédents : cas 1D

- L. Ovsyannikov<sup>4</sup> donne un 1<sup>er</sup> critère **approché** :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} - \frac{(u_2^0 - u_1^0)^2}{g(h_1^0 + h_2^0)} > 0$$

- M.J. Castro-Díaz & al.<sup>5</sup> note **numériquement** l'existence d'un autre domaine d'hyperbolicité

---

<sup>4</sup> *Two-layer shallow water model*, 1979

<sup>5</sup> *Numerical treatment of the loss of hyperbolicity*, 2011

# Hyperbolicité

## Résultats précédents : cas 1D

- L. Ovsyannikov<sup>4</sup> donne un 1<sup>er</sup> critère **approché** :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} - \frac{(u_2^0 - u_1^0)^2}{g(h_1^0 + h_2^0)} > 0$$

- M.J. Castro-Díaz & al.<sup>5</sup> note **numériquement** l'existence d'un autre domaine d'hyperbolicité

---

<sup>4</sup> *Two-layer shallow water model*, 1979

<sup>5</sup> *Numerical treatment of the loss of hyperbolicity*, 2011

# Hyperbolicité

## Quantités caractéristiques

L'hyperbolicité ne dépend que de 4 paramètres :

$$\gamma := \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad H := \frac{h_2}{h_1}, \quad F_x := \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{gh_1}}, \quad F_y := \frac{v_2 - v_1}{\sqrt{gh_1}}$$

# Hyperbolicité

## Quantités caractéristiques

L'hyperbolicité ne dépend que de 4 paramètres :

$$\gamma := \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad H := \frac{h_2}{h_1}, \quad F_x := \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{gh_1}}, \quad F_y := \frac{v_2 - v_1}{\sqrt{gh_1}}$$

# Hyperbolicité

## Quantités caractéristiques

L'hyperbolicité ne dépend que de 4 paramètres :

$$\gamma := \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad H := \frac{h_2}{h_1}, \quad F_x := \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{gh_1}}, \quad F_y := \frac{v_2 - v_1}{\sqrt{gh_1}}$$

## Théorème : cas 1D<sup>6</sup>

Il existe deux quantités critiques  $F_{crit}^{\pm} > 0$  telles que le système 1D est hyperbolique si  $\mathbf{u}_0$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \in ]0, 1[ \\ \inf_{x \in \mathbb{R}} h_1^0 > 0, \quad \inf_{x \in \mathbb{R}} h_2^0 > 0 \\ \inf_{x \in \mathbb{R}} F_{crit}^{-0} - |F_x^0| > 0 \text{ ou } \inf_{x \in \mathbb{R}} |F_x^0| - F_{crit}^{+0} > 0 \end{array} \right.$$

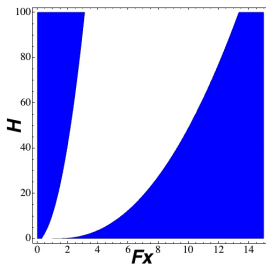
<sup>6</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the two-layer shallow water model with free surface*, 2014, accepté dans *Journal on Applied Mathematics*

# Hyperbolicité

## Quantités caractéristiques

L'hyperbolicité ne dépend que de 4 paramètres :

$$\gamma := \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad H := \frac{h_2}{h_1}, \quad F_x := \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{gh_1}}, \quad F_y := \frac{v_2 - v_1}{\sqrt{gh_1}}$$



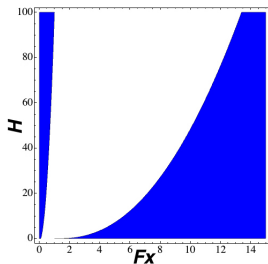
Domaine d'hyperbolicité (zone **bleue**) du modèle bi-couches 1D  
 $\gamma = 0.9$

# Hyperbolicité

## Quantités caractéristiques

L'hyperbolicité ne dépend que de 4 paramètres :

$$\gamma := \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad H := \frac{h_2}{h_1}, \quad F_x := \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{gh_1}}, \quad F_y := \frac{v_2 - v_1}{\sqrt{gh_1}}$$



Domaine d'hyperbolicité (zone **bleue**) du modèle bi-couches 1D  
 $\gamma = 0.99$

# Hyperbolicité

## Quantités caractéristiques

L'hyperbolicité ne dépend que de 4 paramètres :

$$\gamma := \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad H := \frac{h_2}{h_1}, \quad F_x := \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{gh_1}}, \quad F_y := \frac{v_2 - v_1}{\sqrt{gh_1}}$$

## Théorème : cas 2D<sup>6</sup>

Invariance par rotation :  $A(\mathbf{u}, \theta) = {}^T P_\theta A_x(P_\theta \mathbf{u}, \theta) P_\theta \implies$  le système 2D est hyperbolique si, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $P_\theta \mathbf{u}_0$  vérifie le théorème 1D

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \begin{cases} \gamma \in ]0, 1[, \inf_{x \in \mathbb{R}} h_1^0 > 0, \inf_{x \in \mathbb{R}} h_2^0 > 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \inf_{x \in \mathbb{R}} F_{crit}^- - |\cos \theta F_x^0 + \sin \theta F_y^0| > 0 \\ \text{ou } \inf_{x \in \mathbb{R}} |\cos \theta F_x^0 + \sin \theta F_y^0| - F_{crit}^+ > 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

<sup>6</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the two-layer shallow water model with free surface*, accepté dans *Journal on Applied Mathematics*



# Hyperbolicité

## Quantités caractéristiques

L'hyperbolicité ne dépend que de 4 paramètres :

$$\gamma := \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad H := \frac{h_2}{h_1}, \quad F_x := \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{gh_1}}, \quad F_y := \frac{v_2 - v_1}{\sqrt{gh_1}}$$

## Théorème : cas 2D<sup>6</sup>

Invariance par rotation :  $A(\mathbf{u}, \theta) = {}^T P_\theta A_x(P_\theta \mathbf{u}, \theta) P_\theta \implies$  le système 2D est hyperbolique si, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $P_\theta \mathbf{u}_0$  vérifie le théorème 1D

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma \in ]0, 1[, \inf_{x \in \mathbb{R}} h_1^0 > 0, \inf_{x \in \mathbb{R}} h_2^0 > 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \inf_{x \in \mathbb{R}} F_{crit}^- - |\cos \theta F_x^0 + \sin \theta F_y^0| > 0 \\ \text{ou } \inf_{x \in \mathbb{R}} |\cos \theta F_x^0 + \sin \theta F_y^0| - F_{crit}^+ > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

<sup>6</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the two-layer shallow water model with free surface*, accepté dans *Journal on Applied Mathematics*

# Hyperbolicité

## Quantités caractéristiques

L'hyperbolicité ne dépend que de 4 paramètres :

$$\gamma := \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad H := \frac{h_2}{h_1}, \quad F_x := \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{gh_1}}, \quad F_y := \frac{v_2 - v_1}{\sqrt{gh_1}}$$

## Théorème : cas 2D<sup>6</sup>

Invariance par rotation :  $A(\mathbf{u}, \theta) = {}^T P_\theta A_x(P_\theta \mathbf{u}, \theta) P_\theta \implies$  le système 2D est hyperbolique si  $\mathbf{u}_0$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \in ]0, 1[ \\ \inf_{X \in \mathbb{R}^2} h_1^0 > 0, \quad \inf_{X \in \mathbb{R}^2} h_2^0 > 0 \\ \inf_{X \in \mathbb{R}^2} |F_{crit}^-|^2 - |F_x^0|^2 - |F_y^0|^2 > 0 \end{array} \right.$$

<sup>6</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the two-layer shallow water model with free surface*, accepté dans *Journal on Applied Mathematics*

- 1 Modélisation du problème
- 2 Modèle à 2 couches
- 3 Modèle à  $n$  couches**
- 4 Conditions limites ouvertes

# Symétrisabilité

## Résultats précédents : cas 1D

V. Duchêne<sup>7</sup> a prouvé l'existence de  $\mu_i(x) > 0$  tels que le système est hyperbolique si

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \begin{cases} 0 < \rho_i < \rho_{i+1}, \inf_{x \in \mathbb{R}} h_i^0 > 0 \\ \inf_{x \in \mathbb{R}} \mu_i - (u_{i+1}^0 - u_i^0)^2 > 0 \end{cases}$$

## Théorème : cas 2D<sup>8</sup>

Il existe  $\delta_i(X) > 0$  tels que le système est hyperbolique si

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} 0 < \rho_i < \rho_{i+1}, \inf_{X \in \mathbb{R}^2} h_i^0 > 0 \\ \inf_{X \in \mathbb{R}^2} \delta_i - (u_i^0 - \bar{u}^0)^2 - (v_i^0 - \bar{v}^0)^2 > 0 \end{cases}$$

<sup>7</sup>A note on the well-posedness of the 1D multi-layer s.w. model, 2013

<sup>8</sup>R. Monjarret, Local well-posedness of the multi-layer s.w. model with free surface, soumis

# Symétrisabilité

## Résultats précédents : cas 1D

V. Duchêne<sup>7</sup> a prouvé l'existence de  $\mu_i(x) > 0$  tels que le système est hyperbolique si

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \begin{cases} 0 < \rho_i < \rho_{i+1}, \inf_{x \in \mathbb{R}} h_i^0 > 0 \\ \inf_{x \in \mathbb{R}} \mu_i - (u_{i+1}^0 - u_i^0)^2 > 0 \end{cases}$$

## Théorème : cas 2D<sup>8</sup>

Il existe  $\delta_i(X) > 0$  tels que le système est hyperbolique si

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} 0 < \rho_i < \rho_{i+1}, \inf_{X \in \mathbb{R}^2} h_i^0 > 0 \\ \inf_{X \in \mathbb{R}^2} \delta_i - (u_i^0 - \bar{u}^0)^2 - (v_i^0 - \bar{v}^0)^2 > 0 \end{cases}$$

<sup>7</sup>A note on the well-posedness of the 1D multi-layer s.w. model, 2013

<sup>8</sup>R. Monjarret, Local well-posedness of the multi-layer s.w. model with free surface, soumis

# Symétrisabilité

## Résultats précédents : cas 1D

V. Duchêne<sup>7</sup> a prouvé l'existence de  $\mu_i(x) > 0$  tels que le système est hyperbolique si

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \begin{cases} 0 < \rho_i < \rho_{i+1}, \inf_{x \in \mathbb{R}} h_i^0 > 0 \\ \inf_{x \in \mathbb{R}} \mu_i - (u_{i+1}^0 - u_i^0)^2 > 0 \end{cases}$$

## Théorème : cas 2D<sup>8</sup>

Il existe  $\delta_i(X) > 0$  tels que le système est hyperbolique si

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} 0 < \rho_i < \rho_{i+1}, \inf_{X \in \mathbb{R}^2} h_i^0 > 0 \\ \inf_{X \in \mathbb{R}^2} \delta_i - (u_i^0 - \bar{u}^0)^2 - (v_i^0 - \bar{v}^0)^2 > 0 \end{cases}$$

<sup>7</sup>A note on the well-posedness of the 1D multi-layer s.w. model, 2013

<sup>8</sup>R. Monjarret, Local well-posedness of the multi-layer s.w. model with free surface, soumis

# Hyperbolicité

## Résultats précédents : cas 2D

A.L. Stewart et P.J. Dellar<sup>9</sup> ont fait une analyse partielle du tri-couches

Choix des paramètres à étudier?

⇒ **Trop** de paramètres pour une description exacte

## Propriété : cas 1D

On a prouvé une condition nécessaire d'hyperbolicité sur  $\mathbf{u}_0$  :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \inf_{X \in \mathbb{R}^2} 1 - \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} - \frac{(u_{i+1}^0 - u_i^0)^2 + (v_{i+1}^0 - v_i^0)^2}{g(h_{i+1}^0 + h_i^0)} > 0$$

**Question** : Peut-on avoir une condition plus générale?

**Réponse** : *a priori*, pas sans faire de nouvelles hypothèses

---

<sup>9</sup>Multi-layer s.w. equations with complete Coriolis force. Part 3. Hyperbolicity and stability under shear, 2013

# Hyperbolicité

## Résultats précédents : cas 2D

A.L. Stewart et P.J. Dellar<sup>9</sup> ont fait une analyse partielle du tri-couches

Choix des paramètres à étudier?

⇒ **Trop** de paramètres pour une description exacte

## Propriété : cas 1D

On a prouvé une condition nécessaire d'hyperbolicité sur  $\mathbf{u}_0$  :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \inf_{X \in \mathbb{R}^2} 1 - \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} - \frac{(u_{i+1}^0 - u_i^0)^2 + (v_{i+1}^0 - v_i^0)^2}{g(h_{i+1}^0 + h_i^0)} > 0$$

**Question** : Peut-on avoir une condition plus générale?

**Réponse** : *a priori*, pas sans faire de nouvelles hypothèses

<sup>9</sup>*Multi-layer s.w. equations with complete Coriolis force. Part 3. Hyperbolicity and stability under shear*, 2013



# Hyperbolicité

## Résultats précédents : cas 2D

A.L. Stewart et P.J. Dellar<sup>9</sup> ont fait une analyse partielle du tri-couches

Choix des paramètres à étudier?

⇒ Trop de paramètres pour une description exacte

## Propriété : cas 1D

On a prouvé une condition nécessaire d'hyperbolicité sur  $\mathbf{u}_0$  :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \inf_{X \in \mathbb{R}^2} 1 - \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} - \frac{(u_{i+1}^0 - u_i^0)^2 + (v_{i+1}^0 - v_i^0)^2}{g(h_{i+1}^0 + h_i^0)} > 0$$

**Question** : Peut-on avoir une condition plus générale?

**Réponse** : *a priori*, pas sans faire de nouvelles hypothèses

---

<sup>9</sup>Multi-layer s.w. equations with complete Coriolis force. Part 3. Hyperbolicity and stability under shear, 2013

# Hyperbolicité

## Résultats précédents : cas 2D

A.L. Stewart et P.J. Dellar<sup>9</sup> ont fait une analyse partielle du tri-couches

Choix des paramètres à étudier?

⇒ **Trop** de paramètres pour une description **exacte**

## Propriété : cas 1D

On a prouvé une condition nécessaire d'hyperbolicité sur  $\mathbf{u}_0$  :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \inf_{X \in \mathbb{R}^2} 1 - \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} - \frac{(u_{i+1}^0 - u_i^0)^2 + (v_{i+1}^0 - v_i^0)^2}{g(h_{i+1}^0 + h_i^0)} > 0$$

**Question** : Peut-on avoir une condition plus générale?

**Réponse** : *a priori*, pas sans faire de nouvelles hypothèses

---

<sup>9</sup>*Multi-layer s.w. equations with complete Coriolis force. Part 3. Hyperbolicity and stability under shear, 2013*

# Hyperbolicité

## Résultats précédents : cas 2D

A.L. Stewart et P.J. Dellar<sup>9</sup> ont fait une analyse partielle du tri-couches

Choix des paramètres à étudier?

⇒ **Trop** de paramètres pour une description **exacte**

## Propriété : cas 1D

On a prouvé une condition nécessaire d'hyperbolicité sur  $\mathbf{u}_0$  :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} 1 - \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} - \frac{(u_{i+1}^0 - u_i^0)^2 + (v_{i+1}^0 - v_i^0)^2}{g(h_{i+1}^0 + h_i^0)} > 0$$

**Question** : Peut-on avoir une condition plus générale?

**Réponse** : *a priori*, pas sans faire de nouvelles hypothèses

---

<sup>9</sup>*Multi-layer s.w. equations with complete Coriolis force. Part 3. Hyperbolicity and stability under shear, 2013*

# Hyperbolicité

## Résultats précédents : cas 2D

A.L. Stewart et P.J. Dellar<sup>9</sup> ont fait une analyse partielle du tri-couches

Choix des paramètres à étudier?

⇒ **Trop** de paramètres pour une description **exacte**

## Propriété : cas 1D

On a prouvé une condition nécessaire d'hyperbolicité sur  $\mathbf{u}_0$  :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \inf_{X \in \mathbb{R}^2} 1 - \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} - \frac{(u_{i+1}^0 - u_i^0)^2 + (v_{i+1}^0 - v_i^0)^2}{g(h_{i+1}^0 + h_i^0)} > 0$$

**Question** : Peut-on avoir une condition plus générale?

**Réponse** : *a priori*, pas sans faire de nouvelles hypothèses

<sup>9</sup>*Multi-layer s.w. equations with complete Coriolis force. Part 3. Hyperbolicity and stability under shear, 2013*

# Hyperbolicité

## Résultats précédents : cas 2D

A.L. Stewart et P.J. Dellar<sup>9</sup> ont fait une analyse partielle du tri-couches

Choix des paramètres à étudier?

⇒ **Trop** de paramètres pour une description **exacte**

## Propriété : cas 1D

On a prouvé une condition nécessaire d'hyperbolicité sur  $\mathbf{u}_0$  :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \inf_{X \in \mathbb{R}^2} 1 - \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} - \frac{(u_{i+1}^0 - u_i^0)^2 + (v_{i+1}^0 - v_i^0)^2}{g(h_{i+1}^0 + h_i^0)} > 0$$

**Question** : Peut-on avoir une condition plus générale?

**Réponse** : *a priori*, pas sans faire de nouvelles hypothèses

<sup>9</sup>*Multi-layer s.w. equations with complete Coriolis force. Part 3. Hyperbolicity and stability under shear, 2013*

# Nouvelles hypothèses

## Après itérations...

- Le saut de densité entre 2 couches voisines est faible et unique : il existe  $\sigma : \llbracket 1, n-1 \rrbracket \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  injective et  $0 < \epsilon \ll 1$  tels que

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} = 1 - \epsilon^{\sigma(i)}$$

- Les hauteurs vérifient :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{h_i}{h_{i+1}} \in \left[ \frac{1}{c}; c \right], \text{ avec } 1 \ll c$$

## Méthodologie

Développement asymptotique des **éléments propres** de  $A(\mathbf{u}, \theta)$  suivant  $\epsilon$  : utile pour l'**hyperbolicité** et pour les **conditions limites ouvertes**

# Nouvelles hypothèses

## Après itérations...

- Le saut de densité entre 2 couches voisines est faible et unique :  
il existe  $\sigma : \llbracket 1, n-1 \rrbracket \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  injective et  $0 < \epsilon \ll 1$  tels que

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} = 1 - \epsilon^{\sigma(i)}$$

- Les hauteurs vérifient :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{h_i}{h_{i+1}} \in \left[ \frac{1}{c}; c \right], \text{ avec } 1 \ll c$$

## Méthodologie

Développement asymptotique des **éléments propres** de  $A(\mathbf{u}, \theta)$  suivant  $\epsilon$  :  
utile pour l'**hyperbolicité** et pour les **conditions limites ouvertes**

# Nouvelles hypothèses

## Après itérations...

- Le saut de densité entre 2 couches voisines est faible et unique : il existe  $\sigma : \llbracket 1, n-1 \rrbracket \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  injective et  $0 < \epsilon \ll 1$  tels que

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} = 1 - \epsilon^{\sigma(i)}$$

- Les hauteurs vérifient :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{h_i}{h_{i+1}} \in \left[ \frac{1}{c}; c \right], \text{ avec } 1 \ll c$$

## Méthodologie

Développement asymptotique des **éléments propres** de  $A(\mathbf{u}, \theta)$  suivant  $\epsilon$  : utile pour l'**hyperbolicité** et pour les **conditions limites ouvertes**



# Nouvelles hypothèses

## Après itérations...

- Le saut de densité entre 2 couches voisines est faible et unique : il existe  $\sigma : \llbracket 1, n-1 \rrbracket \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  injective et  $0 < \epsilon \ll 1$  tels que

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} = 1 - \epsilon^{\sigma(i)}$$

- Les hauteurs vérifient :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{h_i}{h_{i+1}} \in \left[ \frac{1}{c}; c \right], \text{ avec } 1 \ll c$$

## Méthodologie

Développement asymptotique des éléments propres de  $A(\mathbf{u}, \theta)$  suivant  $\epsilon$  : utile pour l'hyperbolicité et pour les conditions limites ouvertes

# Nouvelles hypothèses

## Après itérations...

- Le saut de densité entre 2 couches voisines est faible et unique : il existe  $\sigma : \llbracket 1, n-1 \rrbracket \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  injective et  $0 < \epsilon \ll 1$  tels que

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} = 1 - \epsilon^{\sigma(i)}$$

- Les hauteurs vérifient :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{h_i}{h_{i+1}} \in \left[ \frac{1}{c}; c \right], \text{ avec } 1 \ll c$$

## Méthodologie

Développement asymptotique des **éléments propres** de  $A(\mathbf{u}, \theta)$  suivant  $\epsilon$  : utile pour l'**hyperbolicité** et pour les **conditions limites ouvertes**

# Nouvelles hypothèses

## Après itérations...

- Le saut de densité entre 2 couches voisines est faible et unique : il existe  $\sigma : \llbracket 1, n-1 \rrbracket \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  injective et  $0 < \epsilon \ll 1$  tels que

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} = 1 - \epsilon^{\sigma(i)}$$

- Les hauteurs vérifient :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{h_i}{h_{i+1}} \in \left[\frac{1}{c}; c\right], \text{ avec } 1 \ll c$$

## Méthodologie

Développement asymptotique des **éléments propres** de  $A(\mathbf{u}, \theta)$  suivant  $\epsilon$  : utile pour l'**hyperbolicité** et pour les **conditions limites ouvertes**

# Nouvelles hypothèses

## Après itérations...

- Le saut de densité entre 2 couches voisines est faible et unique : il existe  $\sigma : \llbracket 1, n-1 \rrbracket \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  injective et  $0 < \epsilon \ll 1$  tels que

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} = 1 - \epsilon^{\sigma(i)}$$

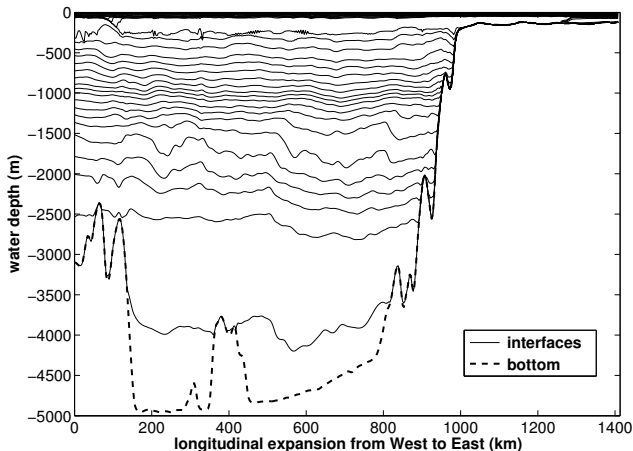
- Les hauteurs vérifient :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{h_i}{h_{i+1}} \in \left[ \frac{1}{c}; c \right], \text{ avec } 1 \ll c$$

## Méthodologie

Développement asymptotique des éléments propres de  $A(\mathbf{u}, \theta)$  suivant  $\epsilon$  : utile pour l'hyperbolicité et pour les conditions limites ouvertes

# Nouvelles hypothèses



Configuration opérationnelle d'HYCOM  
Golfe de Gascogne avec 40 couches

# Analyse asymptotique

## Résultats<sup>10</sup>

- Les valeurs propres barotropes  $\sim$  les valeurs propres d'un modèle à 1 couche
- Les valeurs propres baroclines  $\sim$  les valeurs propres baroclines d'un modèle à 2 couches
- Les champs caractéristiques barotropes et baroclines sont réellement non-linéaires
- Le développement asymptotique nous a permis d'obtenir une expressions approchées des éléments propres de  $A(\mathbf{u}, \theta)$   
 $\implies$  **utile** pour le traitement des **conditions limites transparentes**

---

<sup>10</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the multi-layer shallow water model with free surface*, soumis

# Analyse asymptotique

## Résultats<sup>10</sup>

- Les valeurs propres barotropes  $\sim$  les valeurs propres d'un modèle à 1 couche
- Les valeurs propres baroclines  $\sim$  les valeurs propres baroclines d'un modèle à 2 couches
- Les champs caractéristiques barotropes et baroclines sont réellement non-linéaires
- Le développement asymptotique nous a permis d'obtenir une expressions approchées des éléments propres de  $A(\mathbf{u}, \theta)$   
 $\implies$  **utile** pour le traitement des **conditions limites transparentes**

---

<sup>10</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the multi-layer shallow water model with free surface*, soumis

# Analyse asymptotique

## Résultats<sup>10</sup>

- Les valeurs propres barotropes  $\sim$  les valeurs propres d'un modèle à 1 couche
- Les valeurs propres baroclines  $\sim$  les valeurs propres baroclines d'un modèle à 2 couches
- Les champs caractéristiques barotropes et baroclines sont réellement non-linéaires
- Le développement asymptotique nous a permis d'obtenir une expressions approchées des éléments propres de  $A(\mathbf{u}, \theta)$   
 $\implies$  **utile** pour le traitement des **conditions limites transparentes**

---

<sup>10</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the multi-layer shallow water model with free surface*, soumis



# Analyse asymptotique

## Résultats<sup>10</sup>

- Les valeurs propres barotropes  $\sim$  les valeurs propres d'un modèle à 1 couche
- Les valeurs propres baroclines  $\sim$  les valeurs propres baroclines d'un modèle à 2 couches
- Les champs caractéristiques barotropes et baroclines sont réellement non-linéaires
- Le développement asymptotique nous a permis d'obtenir une expressions approchées des éléments propres de  $A(\mathbf{u}, \theta)$   
 $\implies$  utile pour le traitement des conditions limites transparentes

---

<sup>10</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the multi-layer shallow water model with free surface*, soumis

# Analyse asymptotique

## Résultats<sup>10</sup>

- Les valeurs propres barotropes  $\sim$  les valeurs propres d'un modèle à 1 couche
- Les valeurs propres baroclines  $\sim$  les valeurs propres baroclines d'un modèle à 2 couches
- Les champs caractéristiques barotropes et baroclines sont réellement non-linéaires
- Le développement asymptotique nous a permis d'obtenir une expressions approchées des éléments propres de  $A(\mathbf{u}, \theta)$   
 $\implies$  utile pour le traitement des conditions limites transparentes

---

<sup>10</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the multi-layer shallow water model with free surface*, soumis

# Analyse asymptotique

Résultats<sup>10</sup> : les éléments propres baroclines associés à l'interface  $i$

$$\lambda_i^\pm(\mathbf{u}, \gamma) = \frac{u_{i+1}h_{\sigma,i}^- + u_i h_{\sigma,i}^+}{h_{\sigma,i}^- + h_{\sigma,i}^+} \pm \left[ \frac{h_{\sigma,i}^- h_{\sigma,i}^+}{(h_{\sigma,i}^- + h_{\sigma,i}^+)} \left( 1 - \gamma_i - \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{h_{\sigma,i}^- + h_{\sigma,i}^+} \right) \right]^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}\left(\epsilon^{\frac{\sigma(i)+1}{2}}\right)$$

$$\begin{aligned} l_x^{\lambda_i^\pm}(\mathbf{u}, \gamma) &= \sum_{j=m_i^-}^i \frac{\mathbf{e}_{n+j}^\top}{i - m_i^- + 1} - \sum_{j=i+1}^{m_i^+} \frac{\mathbf{e}_{n+j}^\top}{m_i^+ - i} \\ &+ \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{\sigma,i}^- + h_{\sigma,i}^+} \left( \sum_{j=m_i^-}^i \frac{h_{\sigma,i}^- \mathbf{e}_j^\top}{(i - m_i^- + 1)h_j} + \sum_{j=i+1}^{m_i^+} \frac{h_{\sigma,i}^+ \mathbf{e}_j^\top}{(m_i^+ - i)h_j} \right) \\ &\pm \left[ \frac{h_{\sigma,i}^- h_{\sigma,i}^+}{h_{\sigma,i}^- + h_{\sigma,i}^+} \left( 1 - \gamma_i - \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{h_{\sigma,i}^- + h_{\sigma,i}^+} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \sum_{j=m_i^-}^i \frac{\mathbf{e}_j^\top}{(i - m_i^- + 1)h_j} \\ &\mp \left[ \frac{h_{\sigma,i}^- h_{\sigma,i}^+}{h_{\sigma,i}^- + h_{\sigma,i}^+} \left( 1 - \gamma_i - \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{h_{\sigma,i}^- + h_{\sigma,i}^+} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \sum_{j=i+1}^{m_i^+} \frac{\mathbf{e}_j^\top}{(m_i^+ - i)h_j} \\ &+ \mathcal{O}\left(\epsilon^{\frac{\sigma(i)+1}{2}}\right) \end{aligned}$$

# Analyse asymptotique

## Résultats<sup>10</sup>

- Les valeurs propres barotropes  $\sim$  les valeurs propres d'un modèle à 1 couche
- Les valeurs propres baroclines  $\sim$  les valeurs propres baroclines d'un modèle à 2 couches
- Les champs caractéristiques barotropes et baroclines sont réellement non-linéaires
- Le développement asymptotique nous a permis d'obtenir une expressions approchées des éléments propres de  $A(\mathbf{u}, \theta)$   
 $\implies$  utile pour le traitement des conditions limites transparentes

---

<sup>10</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the multi-layer shallow water model with free surface*, soumis

# Analyse asymptotique

## Résultats<sup>10</sup>

- Les valeurs propres barotropes  $\sim$  les valeurs propres d'un modèle à 1 couche
- Les valeurs propres baroclines  $\sim$  les valeurs propres baroclines d'un modèle à 2 couches
- Les champs caractéristiques barotropes et baroclines sont réellement non-linéaires
- Le développement asymptotique nous a permis d'obtenir une expressions approchées des éléments propres de  $A(\mathbf{u}, \theta)$   
 $\implies$  **utile** pour le traitement des **conditions limites transparentes**

---

<sup>10</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the multi-layer shallow water model with free surface*, soumis

# Analyse asymptotique

## Résultats<sup>10</sup>

- Les valeurs propres barotropes  $\sim$  les valeurs propres d'un modèle à 1 couche
- Les valeurs propres baroclines  $\sim$  les valeurs propres baroclines d'un modèle à 2 couches
- Les champs caractéristiques barotropes et baroclines sont réellement non-linéaires
- Le développement asymptotique nous a permis d'obtenir une expressions approchées des éléments propres de  $A(\mathbf{u}, \theta)$   
 $\implies$  **utile** pour le traitement des **conditions limites transparentes**

---

<sup>10</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the multi-layer shallow water model with free surface*, soumis

# Analyse asymptotique

## Résultats<sup>10</sup>

- Les valeurs propres barotropes  $\sim$  les valeurs propres d'un modèle à 1 couche
- Les valeurs propres baroclines  $\sim$  les valeurs propres baroclines d'un modèle à 2 couches  $\implies$  **Quel est ce bi-couches?**
- Les champs caractéristiques barotropes et baroclines sont réellement non-linéaires
- Le développement asymptotique nous a permis d'obtenir une expressions approchées des éléments propres de  $A(\mathbf{u}, \theta)$   
 $\implies$  **utile** pour le traitement des **conditions limites transparentes**

---

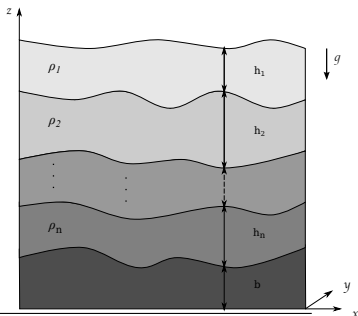
<sup>10</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the multi-layer shallow water model with free surface*, soumis

# Hyperbolicité

## Théorème : cas 2D<sup>11</sup>

Un nouveau critère nécessaire d'hyperbolicité

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \inf_{X \in \mathbb{R}^2} 1 - \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} - \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{g(h_{\sigma,i}^- + h_{\sigma,i}^+)} > 0$$



$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} = 1 - \epsilon^{\sigma(i)}$$

<sup>11</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the multi-layer shallow water model with free surface*, soumis

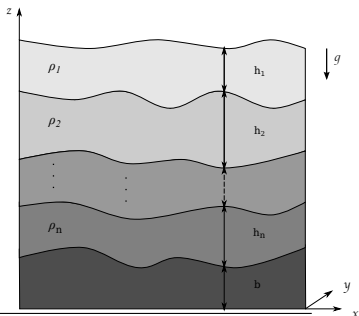


# Hyperbolicité

## Théorème : cas 2D<sup>11</sup>

Un nouveau critère nécessaire d'hyperbolicité

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \inf_{X \in \mathbb{R}^2} 1 - \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} - \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{g(h_{\sigma,i}^- + h_{\sigma,i}^+)} > 0$$



$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} = 1 - \epsilon^{\sigma(i)}$$

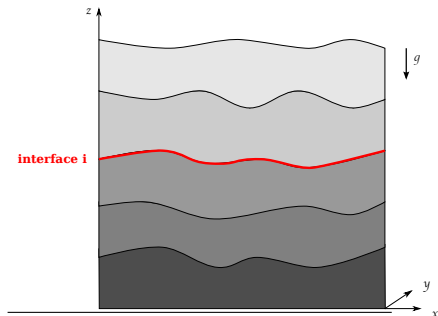
<sup>11</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the multi-layer shallow water model with free surface*, soumis

# Hyperbolicité

## Théorème : cas 2D<sup>11</sup>

Un nouveau critère nécessaire d'hyperbolicité

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \inf_{X \in \mathbb{R}^2} 1 - \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} - \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{g(h_{\sigma,i}^- + h_{\sigma,i}^+)} > 0$$



$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} = 1 - \epsilon^{\sigma(i)}$$

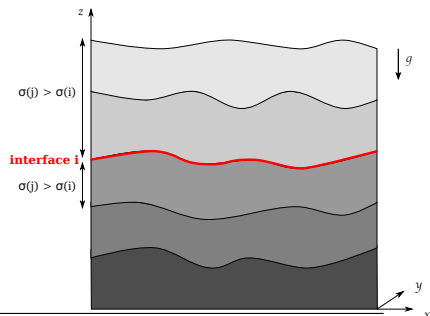
<sup>11</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the multi-layer shallow water model with free surface*, soumis

# Hyperbolicité

## Théorème : cas 2D<sup>11</sup>

Un nouveau critère nécessaire d'hyperbolicité

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \inf_{X \in \mathbb{R}^2} 1 - \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} - \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{g(h_{\sigma,i}^- + h_{\sigma,i}^+)} > 0$$



$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} = 1 - \epsilon^{\sigma(i)}$$

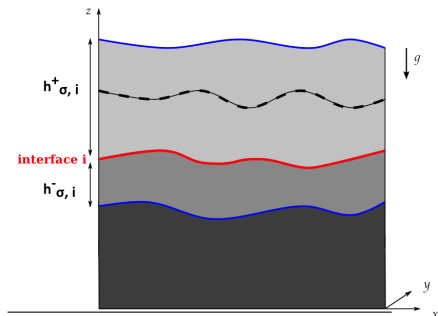
<sup>11</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the multi-layer shallow water model with free surface*, soumis

# Hyperbolicité

## Théorème : cas $2D^{11}$

Un nouveau critère nécessaire d'hyperbolicité

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \inf_{X \in \mathbb{R}^2} 1 - \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} - \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{g(h_{\sigma,i}^- + h_{\sigma,i}^+)} > 0$$

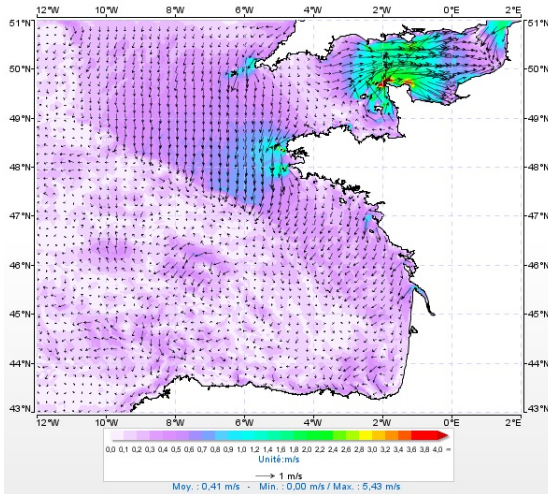


$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} = 1 - \epsilon^{\sigma(i)}$$

<sup>11</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the multi-layer shallow water model with free surface*, soumis

- 1 Modélisation du problème
- 2 Modèle à 2 couches
- 3 Modèle à  $n$  couches
- 4 Conditions limites ouvertes**

# Des frontières artificielles



Prévisions HYCOM (Golfe de Gascogne - 17/12/2014)  
Vitesse de surface ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )

# Difficultés numériques

- Traitement des termes **non-conservatifs** dans l'équation de quantité de mouvement
- Choix des conditions limites à l'aide des développements asymptotiques précédents

# Difficultés numériques

- Traitement des termes **non-conservatifs** dans l'équation de quantité de mouvement
- Choix des conditions limites à l'aide des développements asymptotiques précédents



# Difficultés numériques

- Traitement des termes **non-conservatifs** dans l'équation de quantité de mouvement
- Choix des conditions limites à l'aide des développements asymptotiques précédents

# Termes non-conservatifs

## Choix des inconnues du problème

- Variables **physiques** :  $h_i, q_i := h_i u_i$   
⇒ Termes non-conservatifs de la forme

$$\forall i \neq j, \begin{cases} h_i \partial_x h_j \\ h_i \partial_y h_j \end{cases}$$

- Variables **Hycom** :  $h_i, u_i$   
⇒ Termes non-conservatifs de la forme

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} u_i \partial_x v_i \\ v_i \partial_y u_i \end{cases}$$

**Questions** : Comment traite-t-on numériquement cette non-conservativité?  
A-t-on besoin de la théorie des "chemins conservatifs"<sup>12</sup>

<sup>12</sup>R. Abgrall et S. Karni, *A comment on the computation of non-conservative products*, 2010

# Termes non-conservatifs

## Choix des inconnues du problème

- Variables **physiques** :  $h_i, q_i := h_i u_i$   
⇒ Termes non-conservatifs de la forme

$$\forall i \neq j, \begin{cases} h_i \partial_x h_j \\ h_i \partial_y h_j \end{cases}$$

- Variables **Hycom** :  $h_i, u_i$   
⇒ Termes non-conservatifs de la forme

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} u_i \partial_x v_i \\ v_i \partial_y u_i \end{cases}$$

**Questions** : Comment traite-t-on numériquement cette non-conservativité?  
A-t-on besoin de la théorie des "chemins conservatifs"<sup>12</sup>

<sup>12</sup>R. Abgrall et S. Karni, *A comment on the computation of non-conservative products*, 2010

# Termes non-conservatifs

## Choix des inconnues du problème

- Variables **physiques** :  $h_i, q_i := h_i u_i$   
⇒ Termes non-conservatifs de la forme

$$\forall i \neq j, \begin{cases} h_i \partial_x h_j \\ h_i \partial_y h_j \end{cases}$$

- Variables **Hycom** :  $h_i, u_i$   
⇒ Termes non-conservatifs de la forme

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} u_i \partial_x v_i \\ v_i \partial_y u_i \end{cases}$$

**Questions** : Comment traite-t-on numériquement cette non-conservativité?  
A-t-on besoin de la théorie des "chemins conservatifs"<sup>12</sup>

<sup>12</sup>R. Abgrall et S. Karni, *A comment on the computation of non-conservative products*, 2010

# Termes non-conservatifs

## Choix des inconnues du problème

- Variables **physiques** :  $h_i, q_i := h_i u_i$   
⇒ Termes non-conservatifs de la forme

$$\forall i \neq j, \begin{cases} h_i \partial_x h_j \\ h_i \partial_y h_j \end{cases}$$

- Variables **Hycom** :  $h_i, u_i$   
⇒ Termes non-conservatifs de la forme

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} u_i \partial_x v_i \\ v_i \partial_y u_i \end{cases}$$

**Questions** : Comment traite-t-on numériquement cette non-conservativité?  
A-t-on besoin de la théorie des "chemins conservatifs"<sup>12</sup>

<sup>12</sup>R. Abgrall et S. Karni, *A comment on the computation of non-conservative products*, 2010

# Termes non-conservatifs

## Choix des inconnues du problème

- Variables **physiques** :  $h_i, q_i := h_i u_i$   
⇒ Termes non-conservatifs de la forme

$$\forall i \neq j, \begin{cases} h_i \partial_x h_j \\ h_i \partial_y h_j \end{cases}$$

- Variables **Hycom** :  $h_i, u_i$   
⇒ Termes non-conservatifs de la forme

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} u_i \partial_x v_i \\ v_i \partial_y u_i \end{cases}$$

**Questions** : Comment traite-t-on numériquement cette non-conservativité?  
A-t-on besoin de la théorie des "chemins conservatifs"<sup>12</sup>

<sup>12</sup>R. Abgrall et S. Karni, *A comment on the computation of non-conservative products*, 2010

# Termes non-conservatifs

## Choix des inconnues du problème

- Variables **physiques** :  $h_i, q_i := h_i u_i$   
⇒ Termes non-conservatifs de la forme

$$\forall i \neq j, \begin{cases} h_i \partial_x h_j \\ h_i \partial_y h_j \end{cases}$$

- Variables **Hycom** :  $h_i, u_i$   
⇒ Termes non-conservatifs de la forme

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} u_i \partial_x v_i \\ v_i \partial_y u_i \end{cases}$$

**Questions** : Comment traite-t-on numériquement cette non-conservativité?  
A-t-on besoin de la théorie des "chemins conservatifs"<sup>12</sup>

<sup>12</sup>R. Abgrall et S. Karni, *A comment on the computation of non-conservative products*, 2010

# Termes non-conservatifs

## Choix des inconnues du problème

- Variables **physiques** :  $h_i, q_i := h_i u_i$   
⇒ Termes non-conservatifs de la forme

$$\forall i \neq j, \begin{cases} h_i \partial_x h_j \\ h_i \partial_y h_j \end{cases}$$

- Variables **Hycom** :  $h_i, u_i$   
⇒ Termes non-conservatifs de la forme

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} u_i \partial_x v_i \\ v_i \partial_y u_i \end{cases}$$

**Questions** : Comment traite-t-on numériquement cette non-conservativité?  
A-t-on besoin de la théorie des "chemins conservatifs"<sup>12</sup>

<sup>12</sup>R. Abgrall et S. Karni, *A comment on the computation of non-conservative products*, 2010



# Termes non-conservatifs

## Équations pour chaque couche $i$

Système de départ

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} \partial_t h_i + \partial_x (h_i u_i) + \partial_y (h_i v_i) = 0 \\ \partial_t u_i + \partial_x \left( \frac{1}{2} u_i^2 + P_i \right) + v_i \partial_y u_i = f v_i \\ \partial_t v_i + u_i \partial_x v_i + \partial_y \left( \frac{1}{2} v_i^2 + P_i \right) = -f u_i \end{cases}$$

# Termes non-conservatifs

## Équations pour chaque couche $i$

Système de départ

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} \partial_t h_i + \partial_x (h_i u_i) + \partial_y (h_i v_i) = 0 \\ \partial_t u_i + \partial_x \left( \frac{1}{2} u_i^2 + P_i \right) + v_i \partial_y u_i = f v_i \\ \partial_t v_i + u_i \partial_x v_i + \partial_y \left( \frac{1}{2} v_i^2 + P_i \right) = -f u_i \end{cases}$$

# Termes non-conservatifs

## Équations pour chaque couche $i$

Système de départ

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} \partial_t h_i + \partial_x (h_i u_i) + \partial_y (h_i v_i) = 0 \\ \partial_t u_i + \partial_x \left( \frac{1}{2} u_i^2 + P_i \right) + v_i \partial_y v_i - v_i w_i = f v_i \\ \partial_t v_i + u_i \partial_x u_i + u_i w_i + \partial_y \left( \frac{1}{2} v_i^2 + P_i \right) = -f u_i \end{cases}$$

où  $w_i := \partial_x v_i - \partial_y u_i$  est la vorticité horizontale dans la couche  $i$

## Termes non-conservatifs

Équations pour chaque couche  $i$ Système de départ  $\implies$  Système augmenté de la vorticité

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left\{ \begin{array}{l} \partial_t h_i + \partial_x (h_i u_i) + \partial_y (h_i v_i) = 0 \\ \partial_t u_i + \partial_x \left( \frac{1}{2} u_i^2 + \frac{1}{2} v_i^2 + P_i \right) = f v_i + v_i w_i \\ \partial_t v_i + \partial_y \left( \frac{1}{2} u_i^2 + \frac{1}{2} v_i^2 + P_i \right) = -f u_i - u_i w_i \\ + \partial_t w_i + \partial_x ((w_i + f) u_i) + \partial_y ((w_i + f) v_i) = 0 \end{array} \right.$$

où  $w_i := \partial_x v_i - \partial_y u_i$  est la vorticité horizontale dans la couche  $i$

# Système augmenté

Pour chaque couche  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\mathbf{v} = {}^T(\mathbf{u}, w_1, \dots, w_n)$

$$\begin{cases} \partial_t h_i + \nabla_X \cdot h_i \mathbf{u}_i & = 0 \\ \partial_t \mathbf{u}_i + \nabla_X \cdot \left( \frac{1}{2}(u_i^2 + v_i^2) + P_i \right) & = (f + w_i) \mathbf{u}_i^\perp \\ \partial_t w_i + \nabla_X \cdot (f + w_i) \mathbf{u}_i & = 0 \end{cases}$$

## Théorème<sup>13</sup>

- Le système augmenté est conservatif
- Les mêmes résultats d'hyperbolicité se démontrent, à l'aide des développements faits pour le système non-augmenté

**Question** : La solution  $\mathbf{v}$  du système augmenté représente-t-elle toujours une solution du système de départ?

**Réponse** : Oui, si  $\mathbf{v}(t=0) \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^2)^{4n}$ ,  $s > 2$ , et  $w_i^0 = \frac{\partial v_i^0}{\partial x} - \frac{\partial u_i^0}{\partial y}$

<sup>13</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the multi-layer shallow water model with free surface*, soumis

# Système augmenté

Pour chaque couche  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\mathbf{v} = {}^T(\mathbf{u}, w_1, \dots, w_n)$

$$\begin{cases} \partial_t h_i + \nabla_X \cdot h_i \mathbf{u}_i & = 0 \\ \partial_t \mathbf{u}_i + \nabla_X \cdot \left( \frac{1}{2}(u_i^2 + v_i^2) + P_i \right) & = (f + w_i) \mathbf{u}_i^\perp \\ \partial_t w_i + \nabla_X \cdot (f + w_i) \mathbf{u}_i & = 0 \end{cases}$$

## Théorème<sup>13</sup>

- Le système augmenté est conservatif
- Les mêmes résultats d'hyperbolicité se démontrent, à l'aide des développements faits pour le système non-augmenté

**Question** : La solution  $\mathbf{v}$  du système augmenté représente-t-elle toujours une solution du système de départ?

**Réponse** : Oui, si  $\mathbf{v}(t=0) \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^2)^{4n}$ ,  $s > 2$ , et  $w_i^0 = \frac{\partial v_i^0}{\partial x} - \frac{\partial u_i^0}{\partial y}$

<sup>13</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the multi-layer shallow water model with free surface*, soumis

# Système augmenté

Pour chaque couche  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\mathbf{v} = {}^T(\mathbf{u}, w_1, \dots, w_n)$

$$\begin{cases} \partial_t h_i + \nabla_X \cdot h_i \mathbf{u}_i & = 0 \\ \partial_t \mathbf{u}_i + \nabla_X \cdot \left( \frac{1}{2}(u_i^2 + v_i^2) + P_i \right) & = (f + w_i) \mathbf{u}_i^\perp \\ \partial_t w_i + \nabla_X \cdot (f + w_i) \mathbf{u}_i & = 0 \end{cases}$$

## Théorème<sup>13</sup>

- Le système augmenté est conservatif
- Les mêmes résultats d'hyperbolicité se démontrent, à l'aide des développements faits pour le système non-augmenté

**Question** : La solution  $\mathbf{v}$  du système augmenté représente-t-elle toujours une solution du système de départ?

**Réponse** : Oui, si  $\mathbf{v}(t=0) \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^2)^{4n}$ ,  $s > 2$ , et  $w_i^0 = \frac{\partial v_i^0}{\partial x} - \frac{\partial u_i^0}{\partial y}$

<sup>13</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the multi-layer shallow water model with free surface*, soumis

# Système augmenté

Pour chaque couche  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\mathbf{v} = {}^T(\mathbf{u}, w_1, \dots, w_n)$

$$\begin{cases} \partial_t h_i + \nabla_X \cdot h_i \mathbf{u}_i & = 0 \\ \partial_t \mathbf{u}_i + \nabla_X \cdot \left( \frac{1}{2}(u_i^2 + v_i^2) + P_i \right) & = (f + w_i) \mathbf{u}_i^\perp \\ \partial_t w_i + \nabla_X \cdot (f + w_i) \mathbf{u}_i & = 0 \end{cases}$$

## Théorème<sup>13</sup>

- Le système augmenté est conservatif
- Les mêmes résultats d'hyperbolicité se démontrent, à l'aide des développements faits pour le système non-augmenté

**Question** : La solution  $\mathbf{v}$  du système augmenté représente-t-elle toujours une solution du système de départ?

**Réponse** : Oui, si  $\mathbf{v}(t=0) \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^2)^{4n}$ ,  $s > 2$ , et  $w_i^0 = \frac{\partial v_i^0}{\partial x} - \frac{\partial u_i^0}{\partial y}$

<sup>13</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the multi-layer shallow water model with free surface*, soumis



# Système augmenté

Pour chaque couche  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\mathbf{v} = {}^T(\mathbf{u}, w_1, \dots, w_n)$

$$\begin{cases} \partial_t h_i + \nabla_X \cdot h_i \mathbf{u}_i & = 0 \\ \partial_t \mathbf{u}_i + \nabla_X \cdot \left( \frac{1}{2}(u_i^2 + v_i^2) + P_i \right) & = (f + w_i) \mathbf{u}_i^\perp \\ \partial_t w_i + \nabla_X \cdot (f + w_i) \mathbf{u}_i & = 0 \end{cases}$$

## Théorème<sup>13</sup>

- Le système augmenté est conservatif
- Les mêmes résultats d'hyperbolicité se démontrent, à l'aide des développements faits pour le système non-augmenté

**Question** : La solution  $\mathbf{v}$  du système augmenté représente-t-elle toujours une solution du système de départ?

**Réponse** : Oui, si  $\mathbf{v}(t=0) \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^2)^{4n}$ ,  $s > 2$ , et  $w_i^0 = \frac{\partial v_i^0}{\partial x} - \frac{\partial u_i^0}{\partial y}$

<sup>13</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the multi-layer shallow water model with free surface*, soumis

# Système augmenté

Pour chaque couche  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\mathbf{v} = {}^T(\mathbf{u}, w_1, \dots, w_n)$

$$\begin{cases} \partial_t h_i + \nabla_X \cdot h_i \mathbf{u}_i & = 0 \\ \partial_t \mathbf{u}_i + \nabla_X \cdot \left( \frac{1}{2}(u_i^2 + v_i^2) + P_i \right) & = (f + w_i) \mathbf{u}_i^\perp \\ \partial_t w_i + \nabla_X \cdot (f + w_i) \mathbf{u}_i & = 0 \end{cases}$$

## Théorème<sup>13</sup>

- Le système augmenté est conservatif
- Les mêmes résultats d'hyperbolicité se démontrent, à l'aide des développements faits pour le système non-augmenté

**Question** : La solution  $\mathbf{v}$  du système augmenté représente-t-elle toujours une solution du système de départ?

**Réponse** : Oui, si  $\mathbf{v}(t=0) \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^2)^{4n}$ ,  $s > 2$ , et  $w_i^0 = \frac{\partial v_i^0}{\partial x} - \frac{\partial u_i^0}{\partial y}$

<sup>13</sup>R. Monjarret, *Local well-posedness of the multi-layer shallow water model with free surface*, soumis

# Système augmenté

Pour chaque couche  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\mathbf{v} = {}^T(\mathbf{u}, w_1, \dots, w_n)$

$$\begin{cases} \partial_t h_i + \nabla_X \cdot h_i \mathbf{u}_i & = 0 \\ \partial_t \mathbf{u}_i + \nabla_X \cdot \left( \frac{1}{2}(u_i^2 + v_i^2) + P_i \right) & = (f + w_i) \mathbf{u}_i^\perp \\ \partial_t w_i + \nabla_X \cdot (f + w_i) \mathbf{u}_i & = 0 \end{cases}$$

## Théorème<sup>13</sup>

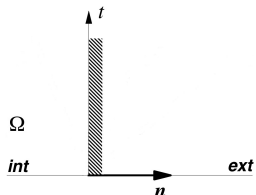
- Le système augmenté est conservatif
- Les mêmes résultats d'hyperbolicité se démontrent, à l'aide des développements faits pour le système non-augmenté

**Question** : La solution  $\mathbf{v}$  du système augmenté représente-t-elle toujours une solution du système de départ?

**Réponse** : Oui, si  $\mathbf{v}(t=0) \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^2)^{4n}$ ,  $s > 2$ , et  $w_i^0 = \frac{\partial v_i^0}{\partial x} - \frac{\partial u_i^0}{\partial y}$

⇒ La **résolution** peut donc se faire en utilisant le **système augmenté** et les schémas généraux des systèmes conservatifs

# Traitement des conditions limites



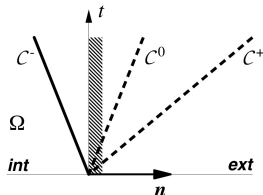
## Méthode d'amplitudes des ondes caractéristiques

Pour le modèle à une couche, R.A. Flather<sup>14</sup> a donné des conditions limites issues des vecteurs propres du modèle linéaire, autour de l'état  $h = cste$  et  $u = v = 0$  :

$$\text{si } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \pm \sqrt{gh} < 0, \quad \mathbf{u}_{int} \cdot \mathbf{n} \pm \sqrt{\frac{g}{h}} h_{int} = \mathbf{u}_{ext} \cdot \mathbf{n} \pm \sqrt{\frac{g}{h}} h_{ext}$$

<sup>14</sup>A tidal model of the northwest European continental shelf, 1976

# Traitement des conditions limites



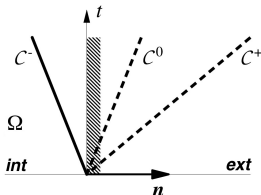
## Méthode d'amplitudes des ondes caractéristiques

Pour le modèle à une couche, R.A. Flather<sup>14</sup> a donné des conditions limites issues des vecteurs propres du modèle linéaire, autour de l'état  $h = cste$  et  $u = v = 0$  :

$$\text{si } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \pm \sqrt{gh} < 0, \quad \mathbf{u}_{int} \cdot \mathbf{n} \pm \sqrt{\frac{g}{h}} h_{int} = \mathbf{u}_{ext} \cdot \mathbf{n} \pm \sqrt{\frac{g}{h}} h_{ext}$$

<sup>14</sup>A tidal model of the northwest European continental shelf, 1976

# Traitement des conditions limites



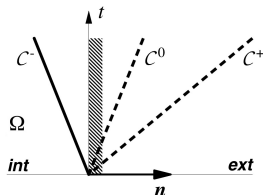
## Méthode d'amplitudes des ondes caractéristiques

Pour le modèle à une couche, R.A. Flather<sup>14</sup> a donné des conditions limites issues des vecteurs propres du modèle linéaire, autour de l'état  $h = cste$  et  $u = v = 0$  :

$$\text{si } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \pm \sqrt{gh} < 0, \quad \mathbf{u}_{int} \cdot \mathbf{n} \pm \sqrt{\frac{g}{h}} h_{int} = \mathbf{u}_{ext} \cdot \mathbf{n} \pm \sqrt{\frac{g}{h}} h_{ext}$$

<sup>14</sup>A tidal model of the northwest European continental shelf, 1976

# Traitement des conditions limites

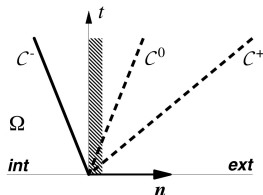


## Méthode d'amplitudes des ondes caractéristiques

Pour le multi-couches, on généralise les conditions de *Flather* : pour toute valeur propre  $\lambda$ , de vecteur propre à gauche  $l^\lambda$ , si  $\lambda < 0$  alors la condition limite est

$${}^T l^\lambda \cdot \mathbf{u}_{int} = {}^T l^\lambda \cdot \mathbf{u}_{ext}$$

# Traitement des conditions limites



## Méthode d'amplitudes des ondes caractéristiques

Pour le multi-couches, on généralise les conditions de *Flather* : pour toute valeur propre  $\lambda$ , de vecteur propre à gauche  $\mathbf{l}^\lambda$ , si  $\lambda < 0$  alors la condition limite est

$$\mathbf{l}^\lambda \cdot \mathbf{u}_{int} = \mathbf{l}^\lambda \cdot \mathbf{u}_{ext}$$



# Cas test : propagation d'une onde de gravité

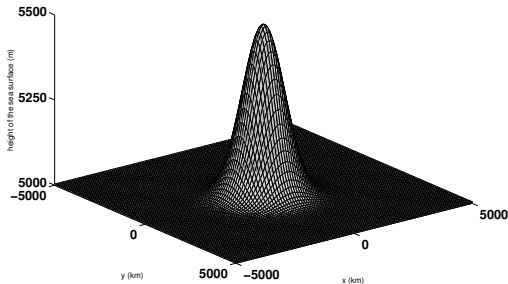
## Configuration

- $\Delta x = 100$  km,  $\Delta t = 10$ min and  $\epsilon = 10^{-3}$
- Vitesse initiale nulle, élévation de surface : gaussienne centrée
- Un **grand domaine** avec **conditions limites fermées**

# Cas test : propagation d'une onde de gravité

## Configuration

- $\Delta x = 100$  km,  $\Delta t = 10$ min and  $\epsilon = 10^{-3}$
- Vitesse initiale nulle, élévation de surface : gaussienne centrée
- Un **grand domaine** avec **conditions limites fermées**



## Cas test : propagation d'une onde de gravité

### Configuration

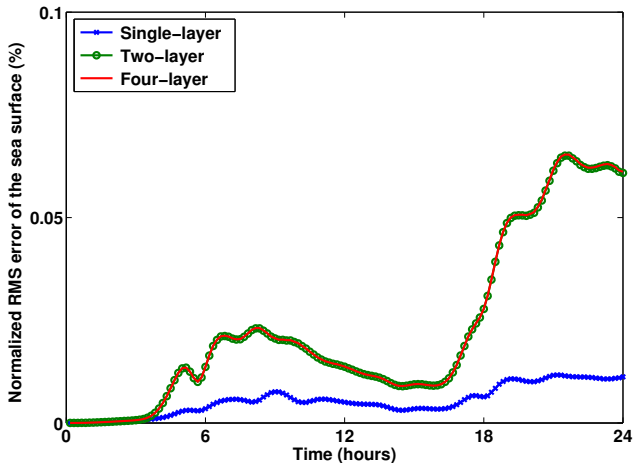
- $\Delta x = 100$  km,  $\Delta t = 10$ min and  $\epsilon = 10^{-3}$
- Vitesse initiale nulle, élévation de surface : gaussienne centrée
- Un **grand domaine** avec **conditions limites fermées**

## Cas test : propagation d'une onde de gravité

### Configuration

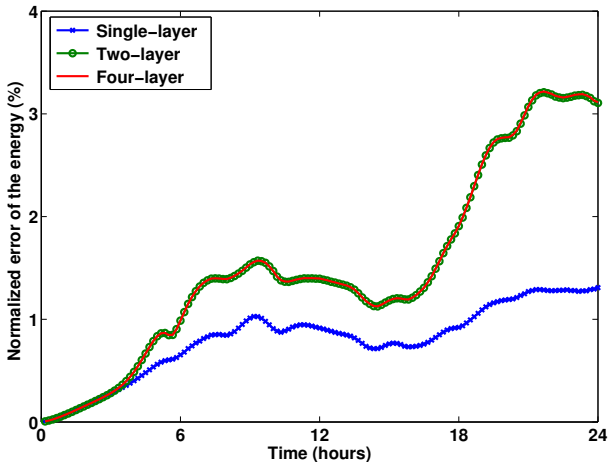
- $\Delta x = 100$  km,  $\Delta t = 10$ min and  $\epsilon = 10^{-3}$
- Vitesse initiale nulle, élévation de surface : gaussienne centrée
- Un **petit domaine** avec **conditions limites ouvertes**

# Cas test : propagation d'une onde de gravité



Erreur RMS normalisée de la surface libre (%)

# Cas test : propagation d'une onde de gravité



Erreur Normalisée de l'énergie (%)

# Conclusion

## Démonstré

- Modèle à 2 couches : hyperbolicité et caractère localement bien-posé du modèle 2D
- Modèle à  $n$  couches : hyperbolicité et caractère localement bien-posé du modèle 2D, pour une configuration particulière :  $\frac{h_i}{h_{i+1}} \in [\frac{1}{c}; c]$
- Conditions limites transparentes : généralisation des conditions limites de *Flather* pour le modèle multi-couches.

## Perspectives

- Implémentation dans HYCOM
- Validité des résultats pour des hypothèses plus larges du type :  $\frac{h_i}{h_{i+1}} \ll 1$  ou  $1 \ll \frac{h_i}{h_{i+1}}$
- Influence de  $\sigma$ ,  $\epsilon$  dans le traitement des conditions limites ouvertes
- Comportement des résultats quand  $n \rightarrow +\infty$

# Conclusion

## Démonstré

- Modèle à 2 couches : hyperbolicité et caractère localement bien-posé du modèle 2D
- Modèle à  $n$  couches : hyperbolicité et caractère localement bien-posé du modèle 2D, pour une configuration particulière :  $\frac{h_i}{h_{i+1}} \in [\frac{1}{c}; c]$
- Conditions limites transparentes : généralisation des conditions limites de *Flather* pour le modèle multi-couches.

## Perspectives

- Implémentation dans HYCOM
- Validité des résultats pour des hypothèses plus larges du type :  $\frac{h_i}{h_{i+1}} \ll 1$  ou  $1 \ll \frac{h_i}{h_{i+1}}$
- Influence de  $\sigma$ ,  $\epsilon$  dans le traitement des conditions limites ouvertes
- Comportement des résultats quand  $n \rightarrow +\infty$



# Conclusion

## Démonstré

- Modèle à 2 couches : hyperbolicité et caractère localement bien-posé du modèle 2D
- Modèle à  $n$  couches : hyperbolicité et caractère localement bien-posé du modèle 2D, pour une configuration particulière :  $\frac{h_i}{h_{i+1}} \in [\frac{1}{c}; c]$
- Conditions limites transparentes : généralisation des conditions limites de *Flather* pour le modèle multi-couches.

## Perspectives

- Implémentation dans HYCOM
- Validité des résultats pour des hypothèses plus larges du type :  $\frac{h_i}{h_{i+1}} \ll 1$  ou  $1 \ll \frac{h_i}{h_{i+1}}$
- Influence de  $\sigma$ ,  $\epsilon$  dans le traitement des conditions limites ouvertes
- Comportement des résultats quand  $n \rightarrow +\infty$

# Conclusion

## Démonstré

- Modèle à 2 couches : hyperbolicité et caractère localement bien-posé du modèle 2D
- Modèle à  $n$  couches : hyperbolicité et caractère localement bien-posé du modèle 2D, pour une configuration particulière :  $\frac{h_i}{h_{i+1}} \in [\frac{1}{c}; c]$
- Conditions limites transparentes : généralisation des conditions limites de *Flather* pour le modèle multi-couches.

## Perspectives

- Implémentation dans HYCOM
- Validité des résultats pour des hypothèses plus larges du type :  $\frac{h_i}{h_{i+1}} \ll 1$  ou  $1 \ll \frac{h_i}{h_{i+1}}$
- Influence de  $\sigma$ ,  $\epsilon$  dans le traitement des conditions limites ouvertes
- Comportement des résultats quand  $n \rightarrow +\infty$

# Conclusion

## Démonstré

- Modèle à 2 couches : hyperbolicité et caractère localement bien-posé du modèle 2D
- Modèle à  $n$  couches : hyperbolicité et caractère localement bien-posé du modèle 2D, pour une configuration particulière :  $\frac{h_i}{h_{i+1}} \in [\frac{1}{c}; c]$
- Conditions limites transparentes : généralisation des conditions limites de *Flather* pour le modèle multi-couches.

## Perspectives

- Implémentation dans HYCOM
- Validité des résultats pour des hypothèses plus larges du type :  $\frac{h_i}{h_{i+1}} \ll 1$  ou  $1 \ll \frac{h_i}{h_{i+1}}$
- Influence de  $\sigma$ ,  $\epsilon$  dans le traitement des conditions limites ouvertes
- Comportement des résultats quand  $n \rightarrow +\infty$

# Conclusion

## Démonstré

- Modèle à 2 couches : hyperbolicité et caractère localement bien-posé du modèle 2D
- Modèle à  $n$  couches : hyperbolicité et caractère localement bien-posé du modèle 2D, pour une configuration particulière :  $\frac{h_i}{h_{i+1}} \in [\frac{1}{c}; c]$
- Conditions limites transparentes : généralisation des conditions limites de *Flather* pour le modèle multi-couches.

## Perspectives

- Implémentation dans HYCOM
- Validité des résultats pour des hypothèses plus larges du type :  $\frac{h_i}{h_{i+1}} \ll 1$  ou  $1 \ll \frac{h_i}{h_{i+1}}$
- Influence de  $\sigma$ ,  $\epsilon$  dans le traitement des conditions limites ouvertes
- Comportement des résultats quand  $n \rightarrow +\infty$

# Conclusion

## Démonstré

- Modèle à 2 couches : hyperbolicité et caractère localement bien-posé du modèle 2D
- Modèle à  $n$  couches : hyperbolicité et caractère localement bien-posé du modèle 2D, pour une configuration particulière :  $\frac{h_i}{h_{i+1}} \in [\frac{1}{c}; c]$
- Conditions limites transparentes : généralisation des conditions limites de *Flather* pour le modèle multi-couches.

## Perspectives

- Implémentation dans HYCOM
- Validité des résultats pour des hypothèses plus larges du type :  $\frac{h_i}{h_{i+1}} \ll 1$  ou  $1 \ll \frac{h_i}{h_{i+1}}$
- Influence de  $\sigma$ ,  $\epsilon$  dans le traitement des conditions limites ouvertes
- Comportement des résultats quand  $n \rightarrow +\infty$

# Conclusion

## Démonstré

- Modèle à 2 couches : hyperbolicité et caractère localement bien-posé du modèle 2D
- Modèle à  $n$  couches : hyperbolicité et caractère localement bien-posé du modèle 2D, pour une configuration particulière :  $\frac{h_i}{h_{i+1}} \in [\frac{1}{c}; c]$
- Conditions limites transparentes : généralisation des conditions limites de *Flather* pour le modèle multi-couches.

## Perspectives

- Implémentation dans HYCOM
- Validité des résultats pour des hypothèses plus larges du type :  $\frac{h_i}{h_{i+1}} \ll 1$  ou  $1 \ll \frac{h_i}{h_{i+1}}$
- Influence de  $\sigma$ ,  $\epsilon$  dans le traitement des conditions limites ouvertes
- Comportement des résultats quand  $n \rightarrow +\infty$

# Conclusion

## Démonstré

- Modèle à 2 couches : hyperbolicité et caractère localement bien-posé du modèle 2D
- Modèle à  $n$  couches : hyperbolicité et caractère localement bien-posé du modèle 2D, pour une configuration particulière :  $\frac{h_i}{h_{i+1}} \in [\frac{1}{c}; c]$
- Conditions limites transparentes : généralisation des conditions limites de *Flather* pour le modèle multi-couches.

## Perspectives

- Implémentation dans HYCOM
- Validité des résultats pour des hypothèses plus larges du type :  $\frac{h_i}{h_{i+1}} \ll 1$  ou  $1 \ll \frac{h_i}{h_{i+1}}$
- Influence de  $\sigma$ ,  $\epsilon$  dans le traitement des conditions limites ouvertes
- Comportement des résultats quand  $n \rightarrow +\infty$

# Conclusion

## Démonstré

- Modèle à 2 couches : hyperbolicité et caractère localement bien-posé du modèle 2D
- Modèle à  $n$  couches : hyperbolicité et caractère localement bien-posé du modèle 2D, pour une configuration particulière :  $\frac{h_i}{h_{i+1}} \in [\frac{1}{c}; c]$
- Conditions limites transparentes : généralisation des conditions limites de *Flather* pour le modèle multi-couches.

## Perspectives

- Implémentation dans HYCOM
- Validité des résultats pour des hypothèses plus larges du type :  $\frac{h_i}{h_{i+1}} \ll 1$  ou  $1 \ll \frac{h_i}{h_{i+1}}$
- Influence de  $\sigma$ ,  $\epsilon$  dans le traitement des conditions limites ouvertes
- Comportement des résultats quand  $n \rightarrow +\infty$